١٠٥ ⑨

جامعة البعث

قسم الرياضيات

تحليل عقدي /2/

اسم الطالب:

الفصل الثاني للعام الدراسي 2016-2017

---

**السؤال الأول : ( 15+10=25درجة)**

1"- أوجد نشر لورانت $f(z)=\dfrac{z^2-6z+10}{z(z-3)}$ في النطاق $3 \prec |z-3|$ .

2"- من النشر السابق حدد نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها .

**السؤال الثاني : (27درجة )**

أوجد وصنّف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$$f_3(z)=\frac{6z-\pi}{2\sin z-1}e^{\frac{1}{z-2}} \;\&\; f_2(z)=\frac{1}{z^2 shz}e^{\frac{1}{z-\pi}} \;\&\; f_1(z)=\frac{z}{e^z-1}$$

السؤال الثالث: (16+16=32درجة )

اعتمادا على مبرهنة الرواسب أوجد قيمة التكاملين الآتيين

$$I_2=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{2z-1}{(z^4-1)^2(z-2)}dz \quad \& \quad I_1=\int_{|z|=1}\frac{ze^{\sin z}}{\cos 3z}dz$$

السؤال الرابع (16درجة)

احسب قيمة التكامل

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}d\theta$$

******************************

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

٢٢/٦/٢٠١٧

جواب السؤال الأول : (15+10=25درجة)

"1

$$f(z)=\frac{z^2-6z+9+1}{z(z-3)}=\frac{(z-3)^2+1}{(z-3)}\frac{1}{z}=\left[(z-3)+\frac{1}{z-3}\right]\left[\frac{1}{z}\right]=\left[(z-3)+\frac{1}{z-3}\right]\frac{1}{z-3+3}$$

$$=\left[1+\frac{1}{(z-3)^2}\right].\frac{1}{1+\frac{3}{z-3}}=\left[1+\frac{1}{(z-3)^2}\right]\left[1-\frac{3}{(z-3)}+\frac{9}{(z-3)^2}-\frac{27}{(z-3)^3}+\dots\right]$$

$$=1-\frac{3}{z-3}+\frac{9}{(z-3)^2}-\frac{27}{(z-3)^3}+\dots-..$$

$$+\frac{1}{(z-3)^2}-\frac{3}{(z-3)^3}+\frac{9}{(z-3)^4}-\dots+\dots$$

$$f(z)=1-\frac{3}{(z-3)}+\frac{10}{(z-3)^2}-\frac{30}{(z-3)^3}+\frac{90}{(z-3)^4}-\dots+\dots \qquad 3\prec|z-3|$$

2"- من النشر السابق نستنتج أنّ نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة قابلة للاصلاح وقيمة

الراسب عندها هي $\operatorname{Re} sf(z)=-\ b=3$

ملاحظة : هناك طريقة ثانية من خلال العلاقات الآتية

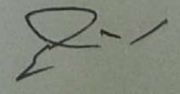
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-3)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-3)^n} \qquad 3\prec|z-3|$$

حيث $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z)}{(z-3)^{n+1}}dz \quad \& \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z)}{(z-3)^{-n+1}}dz$

$$a_0=1\ ,\ a_1=a_2=a_3=\dots\dots=a_n=0$$

$$b_1=-3\ ,\ b_2=10\ ,\ b_3=-30\ ,\ b_4=90\ ,\ \dots\dots$$

وبالتالي فإنّ $f(z)=1-\frac{3}{z-3}+\frac{10}{(z-3)^2}-\frac{30}{(z-3)^3}+\frac{90}{(z-3)^4}+\dots$



جواب السؤال الثاني :

- النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة $e^z - 1 = 0$ وبالتالي فانّ

$$z = 2n\pi i \quad , \quad n = 0 \pm 1, \pm 2, ..........$$

من أجل $n = 0$ فإنّ $z = 0$ وهي صفر من الدرجة الأولى للمقام وهي أيضا صفر من الدرجة الأولى للبسط لذلك فانّ $z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للأصلاح

أما باقي النقاط أي $n = \pm 1, \pm 2, ....$ $z = 2n\pi i$ فهي أصفار من الدرجة الأولى للمقام ولاتعدم البسط لذلك فهي أقطاب بسيطة .

- النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي جذور المعادلتين $z^2 shz = 0$ و $z - \pi = 0$

$z = \pi$ هي قطب بسيط للدالة $\frac{1}{z - \pi}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة

$f_2(z)$ أما $z^2 shz = 0$ $\quad z^2 = 0 \Leftarrow z = 0$ أو

$shz = 0 \Leftarrow z = n\pi i$ $\quad n = 0, 1, 2, 3, ...$ من أجل $n = 0 \Leftarrow z = 0$

أصبحت صفر من الدرجة الثالثة للمقام وبالتالي فهي قطب من الرتبة الثالثة للدالة $f_2(z)$

أما من أجل باقي النقاط فهي أصفار مكن الدرجة الأولى للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_2(z)$.

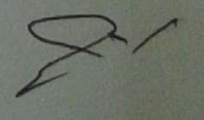
- النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)$ هي جذور المعادلة $z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$ وبما أنها

قطب للدالة $\frac{1}{z - 2}$ فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $f_3(z)$ وأيضا جذور المعادلة

$2\sin z - 1 = 0 \Leftarrow \sin z = \frac{1}{2} \Leftarrow z = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ عندما $n = 0$ فإنّ

$z = \frac{\pi}{6}$ وهي أيضا تعدم البسط لذلك فإنّ $z = \frac{\pi}{6}$ هي نقطة شاذة قابلة للأصلاح

باقي النقاط فهي أقطاب بسيطة .



جواب السؤال الثالث :

"1 $$I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{ze^{shnz}}{\cos 3z}$$

النقاط الشاذة هي $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ من أجل $z = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$

$n = 0 \Leftarrow z = \frac{\pi}{6}$ وهذه النقطة تقع في داخلية الكفاف المعطى من أجل

$z = \frac{-\pi}{2}$ وهي أيضا تقع في داخلية الكفاف أما باقي النقاط فتقع في خارجية

الكفاف لذلك فإنّ $I_1 = 2\quad i\ (b_1 + b_2)$

$$b_1 = \frac{ze^{\sin z}}{-3\sin 3z}\Big|_{z=\frac{\pi}{6}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{-18} \quad , \quad b_2 = \frac{ze^{\sin z}}{-3\sin z}\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{-1}}{-6}$$

أي أنّ $$I_1 = 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{-18} - \frac{e^{-1}}{6}\right)$$

"2 النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $(z^4 - 1)^2 (z - 2) = 0$ ومنه إمّا

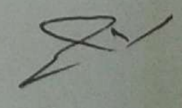
$z - 2 = 0 \Leftarrow z = 2$ وهي نقطة تقع خارج الكفاف وإما $z^4 - 1 = 0$ وجذور هذه المعادلة أربعة وتقع في داخلية الدائرة المعطاة لذلك فإنّ

$$I_2 = 2\pi i \sum_{j=1}^{4} \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{2z - 1}{(z^4 - 1)^2 (z - 2)}$$

ولكن $$\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

بما أنّ نقطة اللانهاية صفر من الدرجة الثامنة فإنّ $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

كما أنّ $$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \frac{3}{(15)^2} \qquad \sum_{j=1}^{4} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) = -\frac{3}{225}$$



ومنه فإنّ $I_2 = 2\pi i\left(-\frac{3}{225}\right) = -\frac{2\pi i}{75}$

جواب السؤال الربع :

نفرض أنّ $0 \le \theta \le 2$ $\quad z = e^{i\theta}$ وبالتالي فإنّ $d\theta = \frac{dz}{iz}$ كما أنّ

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$ , $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ نعوض في التكامل

فنجد أنّ

$$I = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{-6z^4+13z^2-6}\,dz$$

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $-6z^4+13z^2-6=0$

$\Delta = 169-144 = 25$ ومن فإنّ $z^2 = \frac{-13-5}{-12} = \frac{3}{2}$ ومنه فإنّ

$z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ , $z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ وكلاهما يقعان في خارجية دائرة الوحدة

أو $z^2 = \frac{-13+5}{-12} = \frac{2}{3}$ ومنه فإنّ $z_4 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ , $z_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ وكلاهما يقعان

في داخلية دائرة الوحدة

$$\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}} f(z) = \frac{z^2+1}{-24z^3+26z} = \frac{\frac{2}{3}+1}{10\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}} f(z) = \frac{\frac{2}{3}+1}{-10\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$

ومنه فإنّ

$$I = \frac{2\ \ i}{2i}\left(\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\right) = 0$$

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ نشوخ